Санкт-Петербургский государственный университет

**Кафедра математической теории игр и статистических решений**

**Брандуков Роман Рустемович**

**Выпускная квалификационная работа бакалавра**

# «Система обслуживания с недостоверным пополнением очереди»

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,

кандидат физ.-мат. наук,

доцент, ст. преп.

Домановская Е. Ф.

Санкт-Петербург

2016

# Оглавление

## Введение.

Современный человек тесно связан с различного рода системами массового обслуживания. Он ходит в магазин, пользуется транспортом, услугами банков и почты, обедает в кафе. Потому спустя сотню лет теория массового обслуживания не теряет своей актуальности и сегодня. Она лежит в основе проектирования и анализа промышленных предприятий, торговых, транспортных и энергетических систем.

Система массового обслуживания описана, если заданы следующие элементы:

- Входящий поток заявок на обслуживание.
- Дисциплина очереди. Здесь различают систему с отказами и с ожиданием. Система с ожиданием – это система, заявки в которой встают в очередь, если все каналы заняты обслуживанием.
- Обслуживающее устройство (канал) – элемент любой СМО, устройств может быть как одно, так и несколько. В зависимости от того, как организовать работу обслуживающего устройства, меняется длина очереди, время ожидания, время обслуживания.

Функционирование системы массового обслуживания описывается некоторым случайным процессом, так как поступление заявок случайно.

В данной работе рассматривается модификация классической схемы гибели и размножения, в которой входящая заявка по желанию может встать в очередь, а может покинуть систему. Такая модель является обобщением известной СМО с ожиданием [1].

Цель работы – проанализировать систему массового обслуживания, вывести необходимые рабочие формулы, определить характеристики системы.

## Постановка задачи.

Рассматривается $n$ - канальная система массового обслуживания с входящим пуассоновским потоком с параметром $\lambda$, обслуживаются заявки экспоненциально с параметром $\mu$. Когда все каналы заняты обслуживанием, новая входящая заявка встает в очередь с определенной вероятностью $p$ или покидает систему. Задача: исследовать систему в общем и стационарных режимах, вычислить характеристики обслуживания.

## Обзор литературы.

Теория массового обслуживания (ТМО) возникла в связи с необходимостью решения прикладных задач выполнения последовательных однородных операций, случайных по длительности и времени начала. Агнер Краруп Эрланг первым осветил эту проблему, исследуя трафик в телекоммуникационных системах.

Значительный вклад в теорию массового обслуживания внёс русский выдающийся математик Хинчин А.Я. [1], заложив основные идеи и методы приложения теории вероятности к вопросам массового обслуживания.

Монография Гнеденко Б.В. и Коваленко И.Н. [2] поможет освоить теорию для создания прочного фундамента знаний для дальнейшего освоения. В учебнике Вентцель Е.С. «Теория вероятностей»[3] доступно и ясно излагаются элементы ТМО и теории вероятностей, описывается их приложение. Книга Дж. Кемени и Дж. Снелла «Конечные цепи Маркова» [4] и учебник Кремера Н.Ш.[5] содержат множество примеров.

# Глава 1. Построение аналитической модели системы массового обслуживания с недостоверным пополнением очереди.

## 1.1. Граф переходов.

Будем рассматривать $n$- канальную СМО, на вход заявки поступают простейшим потоком с параметром $\lambda$, время обслуживания показательное с параметром $\mu$. Однако нужно учитывать, что наша система с недостоверным пополнением очереди, потому что заявка не обязательно может оказаться в очереди. В работе предполагается, что после того, как все $n$ каналов будут загружены, следующие входящие заявки будут поступать в очередь с интенсивностью $p\lambda$, $0 \le p \le 1$.

В начальный момент времени $t_0 = 0$ система полностью свободна. Будем говорить, что она пребывает в состоянии $S_0$. Когда приходит первая заявка, она сразу встает на обслуживание, тогда система переходит в состояние $S_1$. Если система обслуживает сразу две заявки, то она находится в состоянии $S_2$. Таким образом, когда все $n$ каналов будут заняты, система окажется в состоянии $S_n$, затем, с приходом новых заявок, образуется очередь, и состояния системы будут иметь номер, соответствующий количеству заявок на обслуживании плюс количество заявок в очереди. После обслуживания заявки система возвращается в предыдущее состояние.

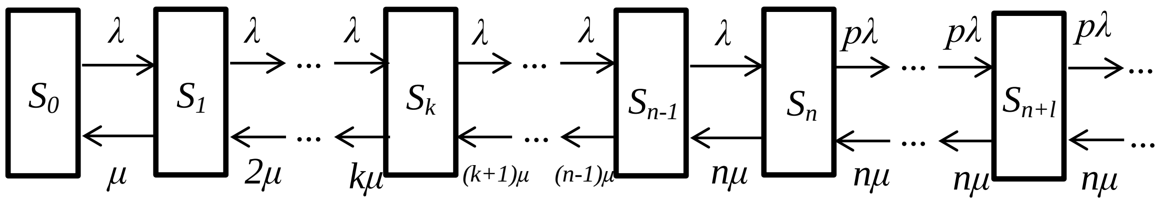


Рис. 1. Граф переходов.

На рис. 1 показаны интенсивности смены состояний СМО, теперь можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающую динамику процесса.

## 1.2. Математическая модель функционирования системы.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что система в момент $t$ окажется в состоянии $S_k$. Пусть в момент $t_0$ система находилась в состоянии $S_i$. На дальнейшее течение обслуживания влияют три фактора:

- Моменты окончания обслуживаний, производящихся в момент $t_0$,
- Моменты появления новых заявок,
- Длительность обслуживания заявок, поступивших после $t_0$.

Обслуживание заявок имеет показательное распределение, а потому длительность оставшейся части обслуживания не зависит от того, как продолжалось обслуживание до момента $t_0$. Так как поток требований простейший, то моменты прихода заявок и количество заявок, поступивших после момента $t_0$, не зависит от прошлого. Длительность обслуживания заявок, поступивших после $t_0$, не зависит от того, как протекал работа системы до момента $t_0$.

Из этого делается вывод, что состояние системы в будущем не зависит от ее состояния в прошлом и определяется только её настоящим. Такой процесс называется марковским. Марковский процесс называется процессом гибели и размножения, если из каждого состояния значима вероятность перехода за время $\Delta t$ только в соседнее состояние, вероятность имеет порядок $\Delta t$ [2].

Составим систему уравнений Колмогорова для рассматриваемой СМО. Обозначим через $P_i(t+\Delta t)$ вероятность того, что в момент $t+\Delta t$ система окажется в $i$ -м состоянии.

$$P_i(t+\Delta t)=\sum_k P_k(t)P_{ki}(\Delta t),\quad i=0,1,...$$

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t)=P_0(t)P_{00}(\Delta t)+P_1(t)P_{10}(\Delta t) \\ P_1(t+\Delta t)=P_0(t)P_{01}(\Delta t)+P_1(t)P_{11}(\Delta t)+P_2(t)P_{21}(\Delta t) \\ ... \\ P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)P_{k-1,k}(\Delta t)+P_k(t)P_{kk}(\Delta t)+P_{k+1}(t)P_{k+1,k}(\Delta t),\quad k=\overline{1,n-1} \\ ... \\ P_{n-1}(t+\Delta t)=P_{n-2}(t)P_{n-2,n-1}(\Delta t)+P_{n-1}(t)P_{n-1,n-1}(\Delta t)+P_n(t)P_{n,n-1}(\Delta t) \\ P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)P_{n-1,n}(\Delta t)+P_n(t)P_{nn}(\Delta t)+P_{n+1}(t)P_{n+1,n}(\Delta t) \\ P_{n+1}(t+\Delta t)=P_n(t)P_{n,n+1}(\Delta t)+P_{n+1}(t)P_{n+1,n+1}(\Delta t)+P_{n+2}(t)P_{n+2,n+1}(\Delta t) \\ ... \end{cases} \qquad (1.1)$$

Переходные вероятности $P_{ij}(\Delta t)$:

$$\begin{aligned} &P_{k-1,k}(\Delta t)=\lambda\Delta t, && k=\overline{1,n} \\ &P_{kk}(\Delta t)=1-(\lambda+k\mu)\Delta t, && k=\overline{0,n-1} \\ &P_{k+1,k}(\Delta t)=(k+1)\mu\Delta t, && k=\overline{0,n-1} \\ &P_{n+l-1,n+l}(\Delta t)=p\lambda\Delta t, && l=1,2,3,... \\ &P_{n+l,n+l}(\Delta t)=1-(p\lambda+n\mu)\Delta t, && l=0,1,2,... \\ &P_{n+l+1,n+l}(\Delta t)=n\mu\Delta t && l=0,1,2,... \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Подставив переходные вероятности (1.2) за $\Delta t$ в (1.1), получаем:

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t + o(\Delta t)\\
P_1(t+\Delta t) = P_0(t)\lambda\Delta t + P_1(t)(1-(\lambda+\mu)\Delta t) + P_2(t)2\mu\Delta t + o(\Delta t)\\
\ldots\\
P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\lambda\Delta t + P_k(t)(1-(\lambda+k\mu)\Delta t) +\\
\qquad\qquad +P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t + o(\Delta t), \qquad k=\overline{1,n-1}\\
\ldots\\
P_{n-1}(t+\Delta t) = P_{n-2}(t)\lambda\Delta t + P_{n-1}(t)(1-(\lambda+(n-1)\mu)\Delta t) + P_n(t)n\mu\Delta t + o(\Delta t)\\
P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + P_n(t)(1-(p\lambda+n\mu)\Delta t) + P_{n+1}(t)n\mu\Delta t + o(\Delta t)\\
P_{n+1}(t+\Delta t) = P_n(t)p\lambda\Delta t + P_{n+1}(t)(1-(p\lambda+n\mu)\Delta t) + P_{n+2}(t)n\mu\Delta t + o(\Delta t)\\
\ldots
\end{cases}
$$

Перенесем в левую часть уравнений все слагаемые без $\Delta t$, в правой остаются элементы, содержащие $\Delta t$:

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -P_0(t)\lambda\Delta t + P_1(t)\mu\Delta t + o(\Delta t)\\
P_1(t+\Delta t) - P_1(t) = P_0(t)\lambda\Delta t - P_1(t)(\lambda+\mu)\Delta t + P_2(t)2\mu\Delta t + o(\Delta t)\\
\ldots\\
P_k(t+\Delta t) - P_k(t) = P_{k-1}(t)\lambda\Delta t - P_k(t)(\lambda+k\mu)\Delta t +\\
\qquad\qquad + P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t + o(\Delta t), \qquad k=\overline{1,n-1}\\
\ldots\\
P_{n-1}(t+\Delta t) - P_{n-1}(t) = P_{n-2}(t)\lambda\Delta t - P_{n-1}(t)(\lambda+(n-1)\mu)\Delta t + P_n(t)n\mu\Delta t + o(\Delta t)\\
P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = P_{n-1}(t)\lambda\Delta t - P_n(t)(p\lambda+n\mu)\Delta t + P_{n+1}(t)n\mu\Delta t + o(\Delta t)\\
P_{n+1}(t+\Delta t) - P_{n+1}(t) = P_n(t)p\lambda\Delta t - P_{n+1}(t)(p\lambda+n\mu)\Delta t + P_{n+2}(t)n\mu\Delta t + o(\Delta t)\\
\ldots
\end{cases}
$$

Разделим обе части на $\Delta t$:

$$\begin{cases} \dfrac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -P_0(t)\lambda + P_1(t)\mu \\ \dfrac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t} = P_0(t)\lambda - P_1(t)(\lambda+\mu) + P_2(t)2\mu \\ \ldots \\ \dfrac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t} = P_{k-1}(t)\lambda - P_k(t)(\lambda+k\mu) + P_{k+1}(t)(k+1)\mu, \qquad k=\overline{1,n-1} \\ \ldots \\ \dfrac{P_{n-1}(t+\Delta t)-P_{n-1}(t)}{\Delta t} = P_{n-2}(t)\lambda - P_{n-1}(t)(\lambda+(n-1)\mu) + P_n(t)n\mu \\ \dfrac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t)\lambda - P_n(t)(p\lambda+n\mu) + P_{n+1}(t)n\mu \\ \dfrac{P_{n+1}(t+\Delta t)-P_{n+1}(t)}{\Delta t} = P_n(t)p\lambda - P_{n+1}(t)(p\lambda+n\mu) + P_{n+2}(t)n\mu \\ \ldots \end{cases}$$

При $\Delta t \to 0$ пределы правых частей существуют, а это значит, что существуют и пределы левых частей. Следовательно, это производные функций $P_i(t)$, и мы получаем систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\
\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu) P_1(t) + 2\mu P_2(t) \\
\ldots \\
\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu) P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), \qquad k = \overline{1, n-1} \\
\ldots \\
\frac{dP_{n-1}(t)}{dt} = \lambda P_{n-2}(t) - (\lambda + (n-1)\mu) P_{n-1}(t) + n\mu P_n(t) \\
\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) P_n(t) + n\mu P_{n+1}(t) \\
\frac{dP_{n+1}(t)}{dt} = p\lambda P_n(t) - (p\lambda + n\mu) P_{n+1}(t) + n\mu P_{n+2}(t) \\
\ldots
\end{cases} \tag{1.3}
$$

Она описывает динамику системы массового обслуживания.

## 1.3. Стационарный режим.

Особый интерес представляют вероятности $P_i(t)$ системы в стационарном режиме, то есть при $t \to \infty$, которые называются предельными вероятностями состояний.

Рассматриваемая нами СМО имеет конечное число каналов, однако длина очереди не ограничена, следовательно, число состояний бесконечно. Стационарный режим существует, если отношение параметров интенсивностей $\frac{p\lambda}{n\mu} < 1$, в противном случае очередь может разрастись до бесконечности [3].

При стационарном состоянии вероятности $P_i$ постоянны и не зависят от времени. Их можно рассматривать как среднее время пребывания системы в состоянии $S_i$ на промежутке единичной длины, достаточно удаленном от начала.

Для определения предельных вероятностей приравниваем к нулю правую часть системы (1.3) и решаем линейную однородную алгебраическую систему.

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ \lambda P_0 - (\lambda + \mu) P_1 + 2\mu P_2 = 0 \\ \ldots \\ \lambda P_{k-1} - (\lambda + k\mu) P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0, \qquad k = \overline{1, n-1} \\ \ldots \\ \lambda P_{n-1} - (p\lambda + n\mu) P_n + n\mu P_{n+1} = 0 \\ p\lambda P_n - (p\lambda + n\mu) P_{n+1} + n\mu P_{n+2} = 0 \\ p\lambda P_{n+1} - (p\lambda + n\mu) P_{n+2} + n\mu P_{n+3} = 0 \\ \ldots \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь последнее уравнение – это условие нормировки, которое позволит найти единственное решение системы.

Выпишем рекуррентные соотношения для вероятностей $P_k$:

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ \lambda P_1 = 2\mu P_2 \\ \dots \\ \lambda P_k = (k+1)\mu P_{k+1}, \qquad\qquad k = \overline{1, n-1} \\ \dots \\ \lambda P_{n-1} = n\mu P_n \\ p\lambda P_n = n\mu P_{n+1} \\ p\lambda P_{n+1} = n\mu P_{n+2} \\ \dots \\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \end{cases}$$

Каждую вероятность выразим через $P_0$, которая находится из условия нормировки.

$$
\begin{cases}
P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\
P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0 \\
\ldots \\
P_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} P_0, \qquad\qquad k = \overline{1, n-1} \\
\ldots \\
P_{n-1} = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!\mu^{n-1}} P_0 \\
P_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 \\
P_{n+1} = \frac{p}{n} \frac{\lambda^{n+1}}{n!\mu^{n+1}} P_0 \\
\ldots \\
P_{n+l} = \frac{p^l}{n^l} \frac{\lambda^{n+l}}{n!\mu^{n+l}} P_0 \\
\ldots \\
\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1,
\end{cases}
$$

где $0 \le l = k - n$ - длина очереди.

Распишем условие нормировки следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k + \sum_{j=n+1}^{\infty} P_j = 1 \tag{1.5}$$

Мы разделили его на две суммы, так как до появления очереди и после у нас разные интенсивности переходов.

Пусть $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$. Используя это обозначение, преобразуем (1.5):

$$P_0\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{p\rho}{n}\right)^l\right)=1$$

Отсюда выражаем вероятность $P_0$:

$$P_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{p\rho}{n}\right)^l\right)^{-1} \qquad (1.6)$$

Решение системы (1.4) имеет вид:

$$\begin{cases} P_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{p\rho}{n}\right)^l\right)^{-1} \\ P_k=\frac{\rho^k}{k!}P_0, & k=\overline{1,n} \\ P_{n+l}=\left(\frac{p}{n}\right)^l\frac{\rho^{n+l}}{n!}P_0=\left(\frac{p\rho}{n}\right)^l P_n, & l=1,2,3,... \end{cases} \qquad (1.7)$$

## 1.4. Обобщение задачи.

Обобщим задачу на случай, когда вероятность заявки встать в очередь зависит от длины очереди.

Когда в рассматриваемой СМО все каналы заняты, индекс $l$ в номере состояния $S_{n+l}$ показывает длину очереди в этом состоянии. Обозначим через $q_l$ вероятность заявки встать в очередь, когда длина её равна $l=0,1,2,...$. Тогда интенсивности переходов в состояния $S_{n+1},S_{n+2},...$ будут соответственно равны $q_1\lambda$, $q_2\lambda,...$.

Учитывая это, повторяем рассуждения из пункта 1.3. Получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{cases}
P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} P_0 \\
P_2 = \dfrac{\lambda}{2\mu} P_1 = \dfrac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0 \\
\dots \\
P_k = \dfrac{\lambda^k}{k!\mu^k} P_0, \qquad\qquad k = \overline{1, n-1} \\
\dots \\
P_{n-1} = \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!\mu^{n-1}} P_0 \\
P_n = \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0 \\
P_{n+1} = \dfrac{q_1}{n} \dfrac{\lambda^{n+1}}{n!\mu^{n+1}} P_0 \\
\dots \\
P_{n+l} = \dfrac{\prod_{i=1}^{l} q_i}{n^l} \dfrac{\lambda^{n+l}}{n!\mu^{n+l}} P_0 = \dfrac{\rho^n}{n!} \left( \dfrac{\rho}{n} \right)^l Q_l P_0 \\
\dots \\
\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \quad ,
\end{cases}
\tag{1.8}
$$

где для удобства записи обозначено $\prod_{i=1}^{l} q_i = Q_l$. Решение системы (1.8) имеет вид:

$$\begin{cases} P_0 = \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{Q_l \rho^l}{n^j} \right)^{-1} \\ P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \qquad\qquad k = \overline{1,n} \\ P_{n+l} = \frac{Q_l}{n^l} \frac{\rho^{n+l}}{n!} P_0, \qquad l = 1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{1.9}$$

# Глава 2. Применение модели.

## 2.1. Характеристики СМО.

Зная вероятности $P_k$ ,системы (1.4) можно получить некоторые характеристики системы, что очень важно, так как эти характеристики позволяют нам провести анализ эффективности СМО [9].

**Вероятность наличия очереди** - вероятность того, что число требований в системе превышает количество каналов:

$$P_{оч} = \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k = P_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{p\rho}{n} \right)^k = \frac{p\rho^{n+1}}{n!(n - p\rho)} P_0 \tag{2.1}$$

**Вероятность того, что все каналы заняты**:

$$P_{зан} = P_n + P_{оч} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 + \frac{p\rho^{n+1}}{n!(n - p\rho)} P_0 = \frac{n\rho^n}{n!(n - p\rho)} P_0 \tag{2.2}$$

**Среднее число занятых каналов:**

$$M_{зан} = \sum_{k=0}^{n-1} kP_k + nP_{зан} = P_0 \left( \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{\rho^k}{k!} + \frac{n^2 \rho^n}{n!(n - p\rho)} \right) \tag{2.3}$$

**Среднее число свободных каналов:**

$$M_{св} = n - M_{зан} \tag{2.4}$$

**Средняя длина очереди:**

$$M_{оч}=\sum_{k=1}^{\infty}kP_{n+k}=P_0\frac{\rho^n}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{p\rho}{n}\right)^k=P_0\frac{p\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-p\rho)^2} \quad (2.5)$$

**Среднее время ожидания начала обслуживания:**

$$T_{ож}=\frac{1}{n\mu}\left(M_{оч}+P_{зан}\right)=P_0\frac{\rho^n}{\mu(n-1)!(n-p\rho)^2} \quad (2.6)$$

**Общее время, которое проводят в очереди требования, поступившие за единицу времени:**

$$\tilde{T}_{ож}=p\lambda T_{ож}=P_0\frac{p\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-p\rho)^2} \quad (2.7)$$

**Среднее время, проводимое требованием в системе обслуживания:**

$$T_{тр}=T_{ож}+\frac{1}{\mu} \quad (2.8)$$

## 2.2. Характеристики для обобщенной СМО.

**Вероятность наличия очереди**:

$$P_{оч}=\sum_{k=n+1}^{\infty}P_k=P_0\frac{\rho^n}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\left(\frac{\rho}{n}\right)^k$$

**Вероятность того, что все каналы заняты**:

$$P_{зан}=P_n+P_{оч}$$

**Среднее число занятых каналов:**

$$M_{зан} = \sum_{k=0}^{n-1} kP_k + nP_{зан}$$

**Среднее число свободных каналов:**

$$M_{св} = n - M_{зан}$$

**Средняя длина очереди:**

$$M_{оч} = \sum_{k=1}^{\infty} kP_{n+k} = P_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} kQ_k \left( \frac{\rho}{n} \right)^k$$

**Среднее время ожидания начала обслуживания:**

$$T_{ож} = \frac{1}{n\mu}\left(M_{оч} + P_{зан}\right)$$

**Среднее время, проводимое заявкой в системе обслуживания:**

$$T_{тр} = T_{ож} + \frac{1}{\mu}$$

## 2.2. Пример.

Рассмотрим трёхканальную систему массового обслуживания с модельными данными. Заявки поступают с интенсивностью 16 заявок/ ед.вр., обслуживаются они с интенсивностью 7 заявок/ед.вр. Вероятность заявки встать в очередь равна 70%.

**Параметры системы:**

$$n = 3$$
$$\lambda = 16$$
$$\mu = 7$$
$$\rho = \frac{16}{7} = 2,286; \qquad \frac{2,286 \cdot 0,7}{3} = 0,5333 < 1$$
$$p = 0,7$$

**Вероятности в стационарном режиме:**

$$P_1 = 2,286 \cdot P_0$$
$$P_2 = 2,612 \cdot P_0$$
$$P_3 = 1,991 \cdot P_0$$
$$P_{3+l} = P_3 \cdot 0,5333^l, \quad l \geq 1$$
$$P_0 = \left( 2,286 + 2,612 + 1,991 + 1,991 \cdot \sum_{l=1}^{\infty} 0,5333^l \right)^{-1} = 0,109$$
$$P_1 = 0,249$$
$$P_2 = 0,284$$
$$P_3 = 0,217$$
$$\sum_{l=1}^{\infty} P_{3+l} = 0,217 \cdot \sum_{l=1}^{\infty} 0,5334^l = 0,248$$

**Характеристики системы:**

Подставляем найденные значения вероятностей в формулы (2.1)-(2.7).

$$P_{оч} = \frac{0,7 \cdot 27,30}{6 \cdot 1,399} P_0 = 0,248$$

$$P_{зан} = \frac{3 \cdot 11,946}{6 \cdot 1,399} P_0 = 0,465$$

$$M_{зан} = 0,109 \cdot 20,312 = 2,214$$

$$M_{св} = 3 - 2,214 = 0,786$$

$$M_{оч} = 0,532$$

$$T_{ож} = 0,047$$

$$\tilde{T}_{ож} = 0,532$$

$$T_{тр} = 0,19$$

**Итог.** Примерно 11% времени все каналы СМО будут свободны, 25% времени будет занят один канал, 28% - будут заняты два канала, и 22% - заняты все три канала. Вероятность того, что в системе образуется очередь, составляет 25%. Вероятность того, что будут заняты все каналы – 46%. Среднее число занятых каналов 2,214. Средняя длина очереди 0,532 заявки. Среднее время, которое проводит заявка в ожидании обслуживания, составило 0,047 ед.вр. Среднее время, проводимое заявкой в системе обслуживания, приблизительно 0,19 ед.вр.

# Вывод.

В данной работе рассмотрена система массового обслуживания с ожиданием, в которой очередь пополнялась с определенной вероятностью.

В первой главе  построена математическая модель рассматриваемой СМО, изображен граф переходов. Первое, что было найдено, это вероятности состояний в стационарном режиме. Для этого выписана и решена система уравнений Колмогорова. Её решением являются искомые вероятности. Далее рассматривается обобщение исходной задачи на случай, когда вероятность заявки встать в очередь зависит от длины этой очереди. Для нее также получены вероятности состояний в стационарном режиме.

Во второй главе работы полученные ранее формулы применены для нахождения характеристик СМО. Определены такие характеристики, как вероятность наличия очереди, среднее число занятых каналов, средняя длина очереди и т.п. Для обобщенной системы задача решена аналогично.

Для иллюстрации просчитан пример с модельными данными.

## Заключение.

Целью работы являлось исследование системы массового обслуживания с недостоверным пополнением очереди, а также вывод формул для дальнейшего их использования при решении задач, связанных с подобными системами.

При решении данной задачи построена математическая модель системы. Аналитически получены формулы для возможного применения их на практике в реальных экономических условиях.

## Список литературы.


1. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. Под редакцией Гнеденко Б.В. М.: Едиториал УРСС, 2004. 235 с.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 5-е, испр. М.: Издательство ЛКИ, 2011. 400с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. 6-е изд. стер. М.: Высш. шк., 1999. 576 с.
4. Кемени Д. Дж., Снелл Дж. Л. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970, 271 с.
5. Кремер Н.Ш. «Теория вероятностей и математическая статистика», учебник. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. 551 с.
6. Элементы ТМО. http://www.resolventa.ru/data/metodstud/